

# Rozdział 6

## Rozkład Gauss'a

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa (PDF - Probability Density Function)

$$PDF = f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

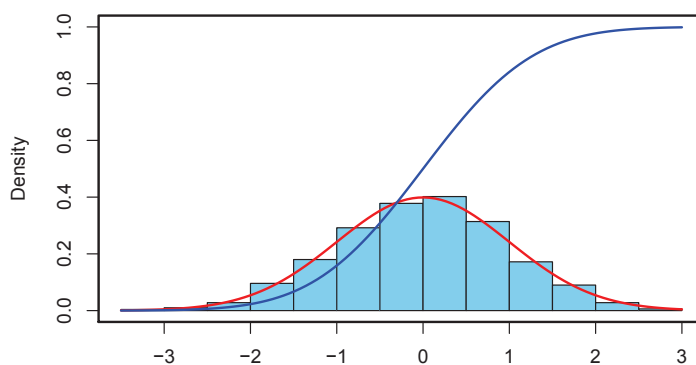
Dystrybuanta rozkładu normalnego

$$CDF = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

```

set.seed(1000)
dane=rnorm(1000, 0, 1)
hist(dane, main="", col="Skyblue", prob=T, ylim=c(0,1), xlab="")
curve(dnorm(x), add=T, col=2, lwd=2)
curve(pnorm(x, 0, 1), add=T, col=4, lwd=2)
box(lwd=2)

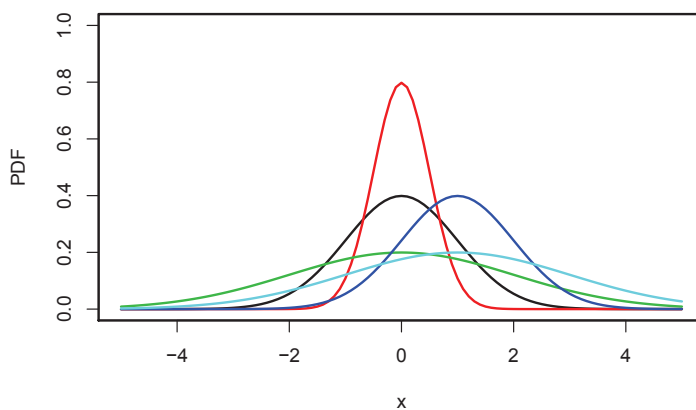
```



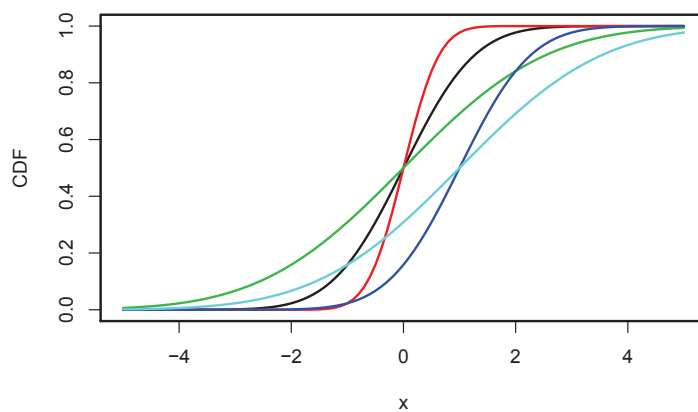
```

curve(dnorm(x, 0, 1), col=1, lwd=2, xlim=c(-5,5), ylim=c(0,1), ylab="PDF", xlab="x")
curve(dnorm(x, 0, 0.5), col=2, lwd=2, xlim=c(-5,5), add=T)
curve(dnorm(x, 0, 2), col=3, lwd=2, xlim=c(-5,5), add=T)
curve(dnorm(x, 1, 1), col=4, lwd=2, xlim=c(-5,5), add=T)
curve(dnorm(x, 1, 2), col=5, lwd=2, xlim=c(-5,5), add=T)
box(lwd=2)

```



```
curve(pnorm(x, 0, 1), col=1, lwd=2, xlim=c(-5,5),
ylim=c(0,1), ylab="CDF", xlab="x")
curve(pnorm(x, 0, 0.5), col=2, lwd=2, xlim=c(-5,5), add=T)
curve(pnorm(x, 0, 2), col=3, lwd=2, xlim=c(-5,5), add=T)
curve(pnorm(x, 1, 1), col=4, lwd=2, xlim=c(-5,5), add=T)
curve(pnorm(x, 1, 2), col=5, lwd=2, xlim=c(-5,5), add=T)
box(lwd=2)
```

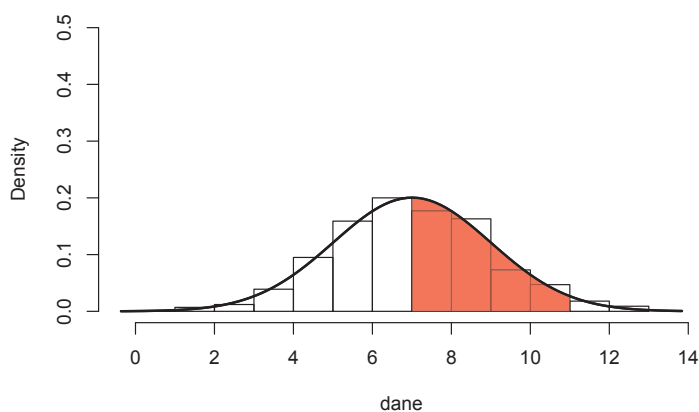


Tablica 6.1: Dystrybuanta rozkładu normalnego  $Z(\mu = 0, \sigma = 1)$ 

<b>Z</b>	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
<b>0,0</b>	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
<b>0,1</b>	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
<b>0,2</b>	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
<b>0,3</b>	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
<b>0,4</b>	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
<b>0,5</b>	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
<b>0,6</b>	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
<b>0,7</b>	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
<b>0,8</b>	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
<b>0,9</b>	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
<b>1,0</b>	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
<b>1,1</b>	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
<b>1,2</b>	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
<b>1,3</b>	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
<b>1,4</b>	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
<b>1,5</b>	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
<b>1,6</b>	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
<b>1,7</b>	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
<b>1,8</b>	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
<b>1,9</b>	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
<b>2,0</b>	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
<b>2,1</b>	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
<b>2,2</b>	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
<b>2,3</b>	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
<b>2,4</b>	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
<b>2,5</b>	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
<b>2,6</b>	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
<b>2,7</b>	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
<b>2,8</b>	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
<b>2,9</b>	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
<b>3,0</b>	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Przykładowe obliczenia dla prawdopodobieństwa wystąpienia wartości między 7 a 11 dla zmiennej o rozkładzie normalnym o  $\mu = 7$  oraz  $\sigma = 2$

```
dane=rnorm(1000, 7, 2)
hist(dane, prob=T, main="", xlim=c(min(dane)-1, max(dane)+1), ylim=c(0,0.5))
curve(dnorm(x, mean(dane), sd(dane)), add=T, lwd=2)
x <- seq(7, 11, len = 100)
y <- dnorm(x, mean(dane), sd(dane))
polygon(c(x[1], x, x[100]), c(0, y, 0), col = rgb(1,0,0,0.7), border = NA)
curve(dnorm(x, mean(dane), sd(dane)), add=T, lwd=2)
```



Obliczenia

```
pnorm(11, 7, 2)-pnorm(7,7,2)
```

```
## [1] 0.4772499
```

## Rozkład Normalny - Zadania

I.

- 1) Zmienna losowa  $Z$  ma  $\mu = \dots\dots\dots$  oraz  $\sigma = \dots\dots\dots$
- 2)  $P(0 < z < 1.53) =$
- 3)  $P(z > -2.18) =$
- 4) Określ wartość  $z_o$ , takie że  $P(-z_o < z < z_o) = 0.92$ .
- 5) Określ wartość  $z_o$ , takie że  $P(z < z_o) = 0.3015$ .

II.

**Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny  $\mu = 80$  i  $\sigma = 12$**

- 1) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość zmiennej  $X$  będzie między 65 i 95?
- 2) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość losowo wybranej zmiennej  $X$  będzie mniejsza od 74?

III.

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny  $\mu = 65$   $\sigma = 15$ . Określ  $x_o$  takie że  $P(x > x_o) = .6738$ .

IV.

Wyniki testu mają rozkład normalny  $\mu = 400$ ,  $\sigma = 45$ .

- 1) Jaki odsetek osób podchodzących do egzaminu będzie miała wynik 310 lub wyższy?
- 2) Jaki odsetek osób podchodzących do egzaminu będzie miało wynik między 445 a 490?

V.

Opracowano test, którego zadaniem było zmierzenie poziomu motywacji w liceum. Wyniki poziomu motywacji mają rozkład normalny  $\mu = 25$ ,  $\sigma = 6$ . Im wyższa wartość tym większa motywacja.

- 1) Jaki odsetek uczniów biorących udział w badaniu będzie miał wynik poniżej 10?
- 2) Jan usłyszał, że 35% uczniów ma większą motywację niż on. Jaki jest poziom motywacji Jana?